

Problème 252 – Pop It !

Niveau : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Suites numériques, Raisonnement par récurrence, Combinatoire

Inédit, publié le 27/11/2021



Dans cette année 2021, le nouveau jeu à la mode qui a occupé les mains des enfants s'appelle le Pop It ! Ce jouet qualifié d' « anti-stress » est une plaque de silicone remplie de petites bulles. Sa forme la plus courante (voir ci-dessus) est un rond avec 6 lignes de bulles : 2 lignes de 3 bulles, 2 lignes de 5 bulles et 2 lignes de 6 bulles. La manière la plus courante de jouer à deux au Pop It ! est d'appuyer, chacun à son tour, sur 1, 2 ou 3 bulles – toutes situées sur une même ligne, le but étant d'éviter d'être la personne qui crève la dernière bulle. Dans ce problème, nous allons essayer de donner un ordre de grandeur du nombre de possibilités de crever toutes les bulles, sous certaines conditions.

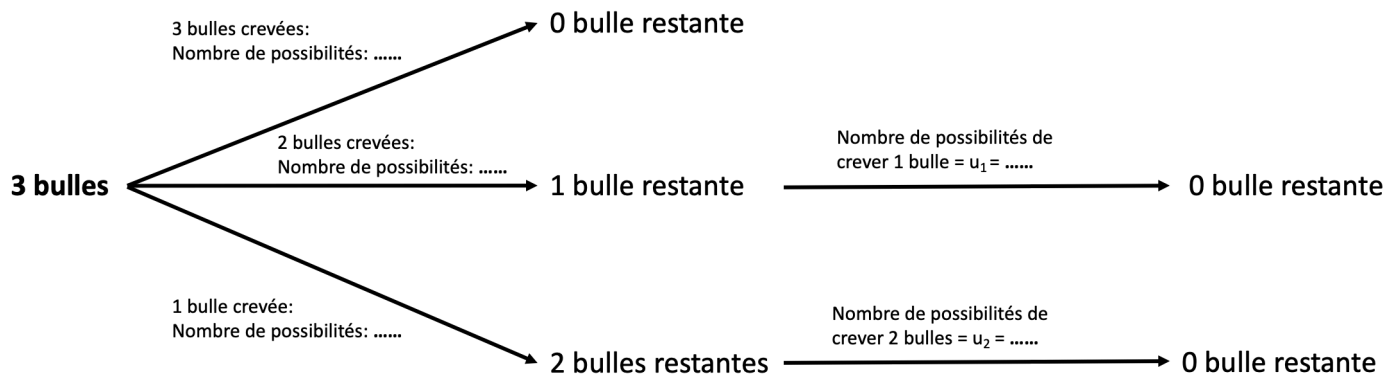
Dans les premières questions, on s'intéresse au nombre de possibilités en ne considérant qu'une seule ligne de n bulles (dans la forme courante du jouet, on a seulement $n = 3, 5$ ou 6 mais les autres valeurs vont nous intéresser aussi). Dans notre modèle, chaque bulle d'une ligne est numérotée de 1 à n . L'ordre dans lequel les bulles sont « crevées » est important : ainsi appuyer sur la bulle numérotée 1 puis 2 n'est pas la même chose que de crever la bulle 2 puis 1. Comme indiqué il est possible d'appuyer sur 1, 2 ou 3 bulles encore non crevées jusqu'à ce que toutes les bulles soient crevées (Remarque : ici, il ne s'agit pas d'éviter de crever la dernière bulle).

On appelle, pour tout entier $n \geq 1$, (u_n) la suite qui à n bulles sur une ligne associe le nombre de manières de crever ces n bulles, en respectant la règle pré-citée. Ainsi, $u_1 = 1$ (il n'y a qu'une seule manière de crever une bulle).

1) Expliquer pourquoi $u_2 = 3$.

2) On suppose dans cette question que $n = 3$.

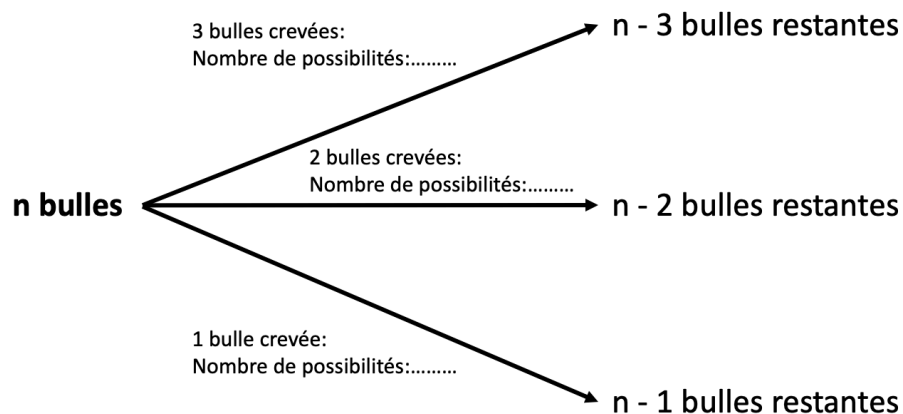
a) Remplir les pointillés dans le diagramme ci-dessous.



b) En déduire la valeur de u_3 .

3) Dans cette question, on généralise en prenant n quelconque.

a) Remplir les pointillés dans le diagramme ci-dessous avec des coefficients binomiaux dépendant de n .



b) En déduire une formule de récurrence donnant u_n en fonction de u_{n-1} , u_{n-2} et u_{n-3} et de coefficients binomiaux dépendant de n .

4) Appliquer la formule trouvée en 3) pour déterminer u_4 , u_5 et enfin u_6 .

5) On suppose que l'ordre dans lequel les bulles sont crevées d'une ligne à l'autre n'importe pas mais que, comme précédemment, l'ordre dans lequel les bulles d'une même ligne sont crevées importe. On peut donc supposer qu'on creve d'abord toutes les bulles d'une ligne, avant de passer à la suivante. La manière dont les bulles sont crevées sur une ligne est indépendante de la manière dont les bulles sur les autres lignes sont crevées.

Calculer un ordre de grandeur du nombre de possibilités de crever toutes les bulles d'un Pop It ! de la forme la plus courante, en respectant les règles du jeu à deux.